

Hallar la inversa de la matriz A

Hallar
 A^{-1}

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

A_{33}

Solución del ejercicio

Ya es sabido que toda matriz cuadrada tiene determinante, no obstante, no toda matriz posee inversa. Un teorema fundamental indica que si $|A| \neq 0$ entonces A es invertible, es decir, si el determinante de una matriz es diferente a cero dicha matriz tendrá inversa.

La inversa se define como: $A^{-1} = A * B = B * A = I$

Donde, $A^{-1} = B$, o sea, la inversa de una matriz A es otra matriz B tal que $A * B = I$. La matriz identidad. Esto quiere decir que se puede usar una matriz ampliada con la matriz identidad y luego llevar la matriz de la izquierda a identidad a través de operaciones de reducción por renglones. Sin embargo, existen una formula genérica.

Por formula general, $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (Adjunta A)$

Entonces, para matrices de orden 3x3 se puede usar la formula general, donde

$$B = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad \text{y Adjunta A} = B^T$$

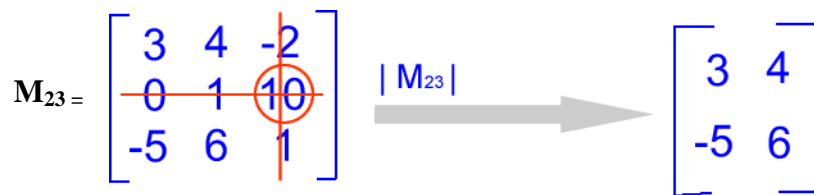
Es decir, B es la matriz de cofactores de la matriz original A y la traspuesta de esta matriz B es la adjunta de la matriz A.

Recuerde la definición de cofactor:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} | \mathbf{M}_{ij} |$$

Donde \mathbf{M}_{ij} es la matriz menor o matriz interna del elemento (i, j) . Esta matriz menor se calcula eliminando o cancelando la fila i y la columna j y dejando la matriz de los demás elementos. A continuación un ejemplo

$$\mathbf{M}_{23} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 10 \\ -5 & 6 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{|\mathbf{M}_{23}|} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$



Resumiendo, el cofactor es un valor *escalar* que se halla multiplicando el signo (+1 ó -1) por el determinante de la matriz menor de dicho elemento (i, j) . Para el cálculo del signo simplemente se eleva la base (-1) al exponente $(i+j)$ en caso de ser $i+j$ par entonces el signo será positivo de lo contrario negativo.

Continuando con el ejercicio:

Para hallar A^{-1} Se proponen cuatro pasos a seguir:

1. Calcular el determinante de A . (recuerde que si el determinante es cero, entonces la matriz A no tendrá inversa).
2. Si el determinante es diferente de cero, entonces hallar la matriz B , es decir la matriz de cofactores de la matriz A .
3. Hallar la Adjunta de A , es decir la traspuesta de la matriz de cofactores B .
4. Aplicar la formula general: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} * (\text{Adjunta } A)$

Entonces, hallando el determinante $|A| = -4$

Como el determinante es diferente de cero entonces la matriz A si tiene inversa.
Continuemos calculando la matriz de cofactores.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1 * (-2) = -2$$

$A_{12} = 2$	$A_{13} = 0$	$A_{21} = -2$	$A_{22} = 0$	$A_{23} = 2$	$A_{31} = 0$	$A_{32} = 2$	$A_{33} = 2$
--------------	--------------	---------------	--------------	--------------	--------------	--------------	--------------

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Por ende, } \text{Adj } A = B^T = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$A^{-1} = -\frac{1}{4} * \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$



Puede verificar que $A * A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Puede repasar el cálculo de determinantes visitando: <http://tutorias.co/tag/determinantes/>